

**LXX олимпиада по математике Эстонии**  
**ШКОЛЬНЫЙ ТУР ТАЛЛИННА**  
**Таллинн, 12 января 2023 года**  
**XII класс**

Время, отводимое для решения: 4 часа.  
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.  
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Аптекарь Мельхиор хранил семена шалфея в деревянной коробке, которая имела форму куба. Коробка была полностью заполнена семенами. При выполнении инвентуры в аптеке он заметил, что на верхней полке у задней стены имеется одна пустая стеклянная емкость в виде конуса, в которой будет лучше экспонировать семена шалфея клиентам аптеки. При сравнении объемов выяснилось, что объем стеклянной конусообразной емкости составляет ровно  $\frac{3}{7}$  от объема деревянной коробки. Мельхиор высыпал из деревянной коробки в стеклянную емкость столько семян, что высота уровня семян, считая от основания емкости, составила  $\frac{1}{2}$  высоты стеклянной емкости. Найдите без учета толщины стенок стеклянной емкости и деревянной коробки, какая часть семян, первоначально лежащих в деревянной коробке, в результате так и осталась лежать в этой коробке?  
Замечание: конусообразная стеклянная емкость стоит на основании конуса.
2. Даны функции:  
 $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$   
 $g(x) = (1 - \sin x)(1 + \tan x)(1 + \sin x)(1 - \tan x)$   
 $h(x) = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$  ja  
 $i(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ 
  - 1) Найдите все значения аргумента  $x$ , при которых выполняется равенство  
$$f(x) = g(x) = h(x) = i(x).$$
  - 2) При каких значениях аргумента  $x$  из отрезка  $[-\pi; \pi]$  значение функции  $y = g(x)$  будет наибольшим из возможных?
3. Последовательность натуральных чисел  $(a_n)$  начинается числами 1, 3, 4, 7, 11, ..., причем каждый следующий член последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих членов (т.е.  $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$  для каждого  $k \geq 3$ ). Какие из следующих утверждений являются верными, а какие – ложными? Обоснуйте.
  - 1) 2023-ий член последовательности  $a_{2023}$  является четным числом.
  - 2) Среди первых 2023 членов последовательности есть ровно 506 чисел, которые делятся нацело на число 3.
  - 3) В этой последовательности нет ни одного числа, которое бы делилось на число 5.
4. Найдите все действительные значения  $x$ , при которых выполняется равенство  
$$\sqrt{x+3} + \sqrt{-x-2} = x^2 + 5x + 7$$
5. В кругу стоят 2022 стула, которые пронумерованы числами от 1 до 2022. Три лягушки сидят на стуле с номером 2022 и начинают прыгать со стула на стул в одном направлении по кругу. Во время прыжка каждая лягушка перемещается на соседний стул, номер которого на единицу больше, чем тот, с которого она прыгает. Со стула с номером 2022 лягушка прыгает на стул с номером 1. Первая лягушка за первый час успевает сделать только один прыжок, вторая – два прыжка, а третья – три прыжка. За каждый следующий час каждая лягушка делает на три прыжка больше, чем за предыдущий час. Например, вторая лягушка за второй час делает пять прыжков и к концу часа находится на стуле с номером 7, за третий – делает 8 прыжков и заканчивает движение на стуле с номером 15. Через некоторое время к концу некоторого часа две лягушки впервые окажутся на одном стуле. Какие две лягушки впервые к концу некоторого часа окажутся на одном стуле, и каков будет номер этого стула.